|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Derivadas |
| Código del guion | MA\_11\_05\_CO |
| Descripción | El concepto de función es considerado como un elemento fundamental para la construcción del pensamiento matemático, debido a que permite modelar situaciones de variación, sin embargo, más que modelar la variación en ocasiones queremos medirla númericamente, esto es posible gracias al concepto de derivada. La derivada de una función en un punto dado mide la variación de la función en dicho punto y para calcularlo nos apoyaremos de las noción de limite que hemos trabajado previamente. |

[SECCIÓN 1]**1 La derivada de una función en un punto**

Cuando conocemos la grafica de una función, podemos observar algunas de sus características si es creciente, decreciente, si es lineal, si es convoca hacia arriba o cóncava hacia abajo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG01 |
| **Descripción** | Un collage de varias graficas de funciones que exiban diversos comportamientos con respecto a si es creciente o no y a concavidad. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Hay variedad en as graficas de funciones |

Dichas características nos permiten analizar elementos de la variación presente en entre la variable dependiente e independiente, por ejemplo si una función es creciente y cóncava hacia arriba sabemos que cuando la variable independiente aumenta la dependiente también lo hace, pero por el tipo de concavidad sabemos que la variable dependiente crece mucho más rápido que la independiente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG02 |
| **Descripción** | Grafica de una función creciente concava hacia arriba con cuadros de variación en los que se haga evidente que cada vez crece más rapido. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El crecimiento es cada vez mayor. |

Si bien la concavidad nos permite mirar aspectos de la variación, en ocasiones queremos conocer no solo el comportamiento de la variación, sino además medir la rapidez con la que cambia el valor de una función matemática, a medida que cambia su variable independiente y para poder medir esta rapidez se definirá el concepto de derivada.

[SECCIÓN 2] 1.1 ¿Medir la variación?

Recordemos que con la derivada queremos medir la variación, pero ¿como es posible hacer algo como esto? , para ampliar nuestra visión observemos la siguiente situación:

* Un ciclista, arranca desde cierto punto, si se sabe que a los 10 min a recorrido una distancia de 3 km, ¿Cuál es la velocidad del ciclista cuando el tiempo transcurrido es de 6 min?.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG03 |
| **Descripción** | Un ciclista recooriendo un camino. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El ciclista comineza a andar a partir de cierto punto. |

Sabemos que la formula de la velocidad es distancia recorrida sobre tiempo transcurrido, con esto tan solo obtendremos la velocidad promedio:

es decir si todo el tiempo el ciclista hubiera mantenido una velocidad de 18 km/h en 10 minutos hubiera recorrido 3 km, pero la velocidad del ciclista no pudo ser constante todo el tiempo, porque el arranca desde un punto, lo que quiere decir que en el tiempo cero su velocidad debe ser cero, esto nos dice que hay momentos en que su velocidad debe haber sido menor a 18 km/h y por ende momentos en que su velocidad fuera mayor a 18 km/h.

Es por esto que no es posible con los datos que nos dan, determinar la velocidad que lleva el ciclista en el momento en que han transcurrido 6 minutos.

* Agreguemos un dato más, como información adicional nos dicen que el ciclista a recorrido 1,08 km cuando han transcurrido 6 minutos.

Tenemos la distancia que ha recorrido exactamente a los seis minutos, esto nos permite calcular la velocidad promedio entre los 4 minutos finales y los seis minutos iniciales:

La velocidad promedio entre el minuto 10 y el minuto 6 esta dado por:

La velocidad promedio entre el minuto 6 y el minuto 0 esta dado por:

Como vemos hay una gran diferencia entre estas dos velocidades promedio, por lo que nuevamente no podemos decir con precisión cual es la velocidad exacta que tiene el ciclista a los seis minutos, tal vez solo podemos hacer el comentario que al parecer el ciclista va aumentando su velocidad a medida que va pasando el tiempo, pero de este hecho tampoco tenemos seguridad.

* Miremos que pasa con más datos, la siguiente tabla presenta las distancias que ha recorrido en ciertos tiempos:

|  |  |
| --- | --- |
| Tiempo (min) | Distancia (Km) |
| 0 | 0 |
| 2 | 0,12 |
| 4 | 0,48 |
| 6 | 1,08 |
| 7 | 1,47 |
| 8 | 1.92 |
| 10 | 3 |

Calculando las velocidades promedio tenemos que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Tiempo Inicial (min) | Tiempo final  (min) | Velocidad Promedio (km/h) |
| 0 | 2 | 3.6 |
| 2 | 4 | 10.8 |
| 4 | 6 | 18 |
| 6 | 7 | 23.4 |
| 7 | 8 | 27 |
| 8 | 10 | 32.4 |

Esta tabla reafirma que al parecer el corredor va aumentando su velocidad a medida que va pasando el tiempo, pero seguimos sin poder asegurarlo. Ahora sobre la velocidad exacta en los seis minutos no la tenemos pero tenemos que el promedio entre el minuto 4 y el 6 es de 18 km/h, mientras que entre el minuto 6 y 7 el promedio es de 23.4 km/h, seguimos sin poder establecer con precisión la velocidad en el minuto seis.

* Miremos ahora que podemos hacer si en la situación tenemos la distancia del corredor con respecto al tiempo transcurrido, es decir, si sabemos que la distancia que avanza el ciclista esta dada por la función:

con en minutos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG04 |
| **Descripción** | Grafica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La velocidad del ciclista aumenta. |

Mirando la grafica de la función, observamos que es creciente y cóncava hacia arriba, esto nos dice que nuestra sospecha de que el corredor va cada vez más rápido era cierta, es decir que el ciclista aumenta su velocidad; ahora ocupémonos de calcular la velocidad a los seis minutos.

Podemos acercarnos a tanto por derecha como por izquierda tanto como queramos, para calcular la velocidad promedio:

La velocidad promedio entre 6.02 min y 6 min es de:

La velocidad promedio entre 5.98 min y 6 min es

Estos dos promedios están mas próximos, el poder acercarnos aun más al minuto seis para calcular las velocidades promedio nos permite calcular de forma cada vez más aproximada la velocidad en el minuto seis, pero podemos ser más exactos, si usamos la noción de limite.

Si tomamos un tiempo que se acerque lo suficiente a 6, podemos calcular la velocidad promedio que existe entre estos dos valores, y entre más cerca este valor de seis (ya sea por derecha o por izquierda), esta velocidad promedio se acercara más a la velocidad en el minuto seis, entonces decimos que la velocidad en el tiempo 6 esta dada por:

calculando tenemos que:

Este resultado esta en km/min pasándolo a horas tenemos que:

En esta ocasión podemos afirmar que la velocidad del ciclista en el minuto seis, es 21,6 km/h.

A partir de la situación anterior podemos decir que para medir la variación podemos usar la noción de limite.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Variación de una función en un punto dado** |
| **Contenido** | Sea una función real, y entonces la variación que presenta la función en el punto esta dada por: |

[SECCIÓN 2] 1.2 Definición de derivada de una función en un punto

La derivada de una función es un concepto local, es decir medimos la variación que presenta una función en un punto especifico de su dominio, por ello se habla del valor de la derivada de una función en un punto dado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de derivada de una función en un punto dado** |
| **Contenido** | Sea una función real, y definimos la **derivada de en el punto**  (notada por como:  si este limite existe y es número real. En tal caso también diremos que  **es derivable en .** |

Al observar la definición, este limite no refleja la idea construida como razón de cambio cuando estábamos intentando medir la variación, pero para ver que efectivamente son el mismo, basta con hacer un cambio de variable . Entonces tenemos que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Derivada de una función en un punto dado** |
| **Contenido** | Si es una función real y entonces: |

Cualquiera de estos dos limites nos permiten calcular la derivada en el punto dado. Cuando la derivada existe

Ejemplo 1. Calcular la derivada de en el punto

luego es derivable en 3.

Ejemplo 2. Calcular la derivada de en el punto

luego es derivable en -4.

Ejemplo 3.Consideremos la función se tiene que:

luego es derivable en 3.

[SECCIÓN 2] 1.3 Funciones no derivables en un punto

La derivada de una función se define como el número que obtenemos al evaluar un limite, pero sabemos que al calcular un limite es posible que este no existe o sea infinito.

Ejemplo 1: Consideremos la función

Para evaluar la función en cero, tenemos que ver que si entonces toma valores positivos y se le aplicaría , pero si toma valores negativos y se le debe aplicar , entonces se tiene que:

por lo tanto el limite no existe y decimos que  **no es derivable en 0.**

En el ejemplo anterior el limite tiende a , debido a que el numerador no tiende a cero, es decir que cuando se acercaba a 0, no se acercaba a en otras palabra la función no es continua en .

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Diremos que **una función es continua en punto**  si y solo si se cumple que: |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG05 |
| **Descripción** | Grafica de ampliado cerca de . |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es discontinua y no derivable en |

Observemos que si una función no es continua en un punto entonces debe suceder que

o que este limite no exista. Lo que lleva de inmediato a que sea o que no exista, por lo que obtenemos la siguiente regla que será de bastante utilidad.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Condición necesaria para la existencia de la derivada en un punto** |
| **Contenido** | **Si no es continua en entonces no es derivable en** |

Ejemplo 2. Si consideramos la función parte entera , tenemos de inmediato que ella no es derivable en ningún numero entero dado que no es continua en esos puntos.

Debemos tener cuidado cunado usamos la regla de la continuidad para derivadas, la regla nos asegura que si la función no es continua en un punto, no es derivable en ese punto, pero no nos dice que pasa cuando la función es continua en ese punto, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. Consideremos la función , sabemos que la función es continua en todo su dominio, determinemos si es derivable en .

por lo tanto la función no es derivable en cero, a pesar de ser continua en ese punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG06 |
| **Descripción** | Grafica de ampliado cerca de . |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función no es derivable en |

Ejemplo 4. Consideremos la función , sabemos que la función es continua en todo su dominio, determinemos si es derivable en .

tenemos que:

y

Como vemos cuando tiende a cero por derecha y por izquierda, los limites existen pero son diferentes, luego el limite no existe y por lo tanto la función no es derivable en cero, a pesar de ser continua en ese punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG07 |
| **Descripción** | Grafica de ampliado cerca de . |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función no es derivable en |

Observemos que en la grafica de a función en la función presenta un cambio brusco, un **“pico”** , pero esto no es exclusivo de esta función miremos otro ejemplo.

Ejemplo 7. Consideremos la función , sabemos que la función es continua en todo punto salvo en cero, luego no es derivable en cero, determinemos si es derivable en .

tenemos que:

y

Como vemos cuando tiende a cero por derecha y por izquierda, los limites existen pero son diferentes, luego el limite no existe y por lo tanto la función no es derivable en cero, y en este punto se presenta un pico.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG08 |
| **Descripción** | Grafica de ampliado cerca de y |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función no es derivable en ni en , pero en este último punto presenta un pico. |

[SECCIÓN 2] 1.4 Notaciones de la derivada

Varias sido las notaciones que a lo largo del tiempo se han usado para representar la derivada de una función en un punto dado, sugeridas por matemáticos como Lagrange, Leibinz, Cauchy, las cuales se siguen usando hoy en día según el contexto en el que se este trabajando, es decir no hay única notación universal para la derivada.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | Notaciones de la derivada |
| **Contenido** | Si , algunas otras notaciones comunes para la derivada de la función en el punto son: |

Las primeras notaciones, por lo general se usan en un contexto en el que es claro cual es la variable independiente respecto a la cual se esta realizando la derivación:

observemos que la variable no aparece de forma explicita.

Las otras nataciones, por lo general se usan en un contexto en el que aparecen más de dos variables y es necesario especificar, cual de ellas es la variable independiente respecto a la cual se esta realizando la derivación:

observemos que la variable aparece de forma explicita.

[SECCIÓN 2] 1.5 Consolidación

[SECCIÓN 1]**2 Interpretación de la derivada**

Hay dos contextos en los que podemos dar una interpretación a concepto de derivada de una función, la razón de cambio instantánea que es una aproximación numérica relacionada con la medición de la variación de la función y la recta tangente que responde más a una interpretación grafica de la derivada.

[SECCIÓN 2] 2.1 La razón de cambio instantánea

La razón de cambio instantánea es una generalización al problema que presentamos de la velocidad. Si tenemos dos variables relacionadas e , por medio de una función de tal manera que depende de es decir que , entonces todo cambio en produce un cambio en . Debido a esto podemos definir:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | Razón de cambio promedio |
| **Contenido** | Si , definimos la razón de cambio promedio de entre y por:  lo leemos como el cambio en y como el cambio en . |

Ahora, para hallar la razón de cambio en instante , podemos trabajar de forma análoga a lo realizado en el problema del ciclista, haciendo que tienda a tomando intervalos cada vez más pequeños lo que hace que tienda a 0. Es decir la razón de cambio en instantánea es el límite de las razones de cambio promedio cuando tiende a cero, lo que coincide con la derivada.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | Razón de cambio Instantánea |
| **Contenido** | Si , definimos la r**azón de cambio instantánea de con respecto en el instamte**  por: |

Ejemplo 1. Se sabe que el número de miles de bacterias después de *t* horas en un experimento controlado de laboratorio es . ¿cuál es la rapidez con al que crece la población cuando han transcurrido dos horas?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG09 |
| **Descripción** | Imagen que ilustre un cultivo de bacterias. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Crecimiento bacteriano |

Cuando preguntan por la rapidez con la que cambia la variable en un instante exacto, nos habla de la razón de cambio de la población de bacterias con respecto al tiempo en el instante dado, es decir que nos piden calcular:

Tenemos que:

Es decir que la rapidez con la que crece la población a las dos horas es de aproximadamente de 22.1671 millones/h

Ejemplo 2. El costo de producir (en miles de pesos) unidades de cierto artículo esta dad por :

calcular el ***costo marginal*** (la razón de cambio instantánea del costo con respecto a la producción) cuando se producen 100 artículos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG10 |
| **Descripción** | Imagen que ilustre la fabriacación de un articulo. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Costo marginal |

Tenemos que:

Es decir que el costo marginal es de 90030 pesos/artículo.

[SECCIÓN 2] 1.3 Consolidación

[SECCIÓN 2] 1.1 Derivada de una función en un intervalo abierto

Sea : una función y definimos la derivada de en el punto (notada por como:

si este limite existe.

[SECCIÓN 2] 1.2 Funciones no derivables en un punto

[SECCIÓN 2] 1.3 La derivada como función

[SECCIÓN 2] 1.4 Notaciones de la derivada

[SECCIÓN 2] 1.5 Consolidación

[SECCIÓN 1]**3 Interpretación de la derivada**

[SECCIÓN 1] 3. **Función derivada**

Aunque la definición de derivada hasta el momento es un concepto local, en el sentido que nos interesa medir la variación en un punto especifico, sin embargo, de manera análoga a lo sucedido con la continuidad trasladaremos la idea de derivada de una función a intervalos.

[SECCIÓN 2] 3.1 Funciones continuas en intervalos abiertos

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Derivación en intervalos abiertos** |
| **Contenido** | Una función  **es derivable en un intervalo abierto**  si y solo si e**s la derivada existe en todo punto** .  Una función  **es derivable en un intervalo abierto**  si y solo si e**s derivable en todo punto** .  Una función  **es derivable en un intervalo abierto**  si y solo si e**s derivable en todo punto** .  Una función  **es derivable en**  si y solo si e**s derivable en todo número real.** |

Ejemplo 1. Consideremos la función , sabemos que es continua en todos los número reales, miremos en cuales es derivable, para ello calculemos su derivada en términos generales:

Como vemos en este caso la derivada de la función existe para todo valor real , por lo tanto decimos que la función es derivable en .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es derivable en todos los reales. |

Ejemplo 2. Consideramos la función , sabemos que la función es continua en y en , miremos si es derivable en estos intervalos:

para todos los valores diferentes de cero tenemos que:

es decir que la función es derivable para todos los valores diferentes de cero por tanto podemos decir que es derivable en y en

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_IMG |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es derivable en y en |

[SECCIÓN 2] 3.2 Funciones continuas en intervalos semiabiertos

Antes de definir cuando una función es derivable en intervalo semiabierto es necesario que definamos cuando una función es derivable en punto por derecha y cuando es derivable n un punto por izquierda.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Derivada en un punto por derecha** |
| **Contenido** | Una función  **es derivable por derecha en**  si y solo si  existe y es finito. |

Ejemplo 1. Si retomamos el ejemplo de tenemos que no es derivable en , sin embargo tenemos que en si es derivable por derecha ya que:

Ejemplo 2. Retomemos el ejemplo de la función sabemos no es derivable en , pero miremos si es derivable por derecha.

por lo tanto la función es derivable en por derecha.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Derivada en un punto por derecha** |
| **Contenido** | Una función  **es derivable por izquierda en**  si y solo si  existe y es finito. |

Ejemplo 3. Si retomamos el ejemplo de tenemos que no es derivable en , sin embargo tenemos que en si es derivable por izquierda ya que:

Ejemplo 4. Retomemos el ejemplo de la función sabemos no es derivable en , pero miremos si es derivable por izquierda.

por lo tanto la función no es derivable en por izquierda.

Con las definiciones de derivada en un punto por derecha y por izquierda, podemos definir que es una función sea derivable en un intervalo semiabierto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Derivación en intervalos semiabiertos** |
| **Contenido** | Una función  **es derivable en un intervalo Semiabierto**  si y solo si e**s c derivable y derivable por derecha en** .  Una función  **es derivable en un intervalo Semiabierto**  si y solo si e**s derivable y derivable por derecha en** .  Una función  **es derivable en un intervalo Semiabierto**  si y solo si e**s derivable y derivable por izquierda en** .  Una función  **es derivable en un intervalo Semiabierto**  si y solo si e**s derivable y derivable por izquierda en** . |

Ejemplo 4. Retomemos el ejemplo de la función sabemos que es continua en todos los reales pero no es derivable en cero, pero ahí es derivable tanto por derecha como por izquierda miremos en los demás puntos.

Si entonces

y como es negativo y se acerca a cero:

por lo tanto la función es derivable en .

Si entonces

y como es positivo y se acerca a cero:

por lo tanto la función es derivable en .

Ejemplo 6. Retomemos el ejemplo de la función sabemos es derivable en por derecha pero no por izquierda y que no es derivable en pero si lo es por derecha y por izquierda en ese punto, miremos los demás puntos:

Si

por lo tanto es derivable en

Si

por lo tanto es derivable en

Si

por lo tanto es derivable en

Ejemplo 7. Si consideramos la función , sabemos que no es derivable en los enteros, pero miremos si en estos puntos lo es por derecha o por izquierda.

Si

y

por lo tanto en los enteros la función es derivable por derecha pero no por izquierda.

Miremos ahora en los demás puntos, sea

como es lo suficientemente pequeño

por lo tanto podemos decir que es derivable en todos los intervalos con .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG27 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es derivable en con . |

[SECCIÓN 2] 3.3 Funciones continuas en intervalos Cerrados

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Continuidad en intervalos Cerrados** |
| **Contenido** | Una función  **es continua en un intervalo Cerrado**  si y solo si e**s continua , continua por derecha en y continua por izquierda en**. |

Ejemplo 1. Consideramos la función , tenemos que esta función es continua en todos los reales y esta dada por trozos de la siguiente manera:

miremos primero que sucede en

de donde:

y

por lo tanto en no es derivable pero si es derivable por derecha y derivable por izquierda.

En

de donde:

y

por lo tanto en no es derivable pero si es derivable por derecha y derivable por izquierda.

Ahora si

por lo tanto la función es derivable en y en

por último si

por lo tanto la función es derivable en

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG29 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es derivable en , en y en . |

[SECCIÓN 2] 3.4. La función derivada

Como hemos visto en las secciones anteriores, en varias ocasiones cuando hemos calculado en forma general la derivada de una función en un punto , hemos obtenido una expresión que depende del mismo , y nos permitiría calcularla deriva en un punto especifico tan solo el valor de por el número que queremos, ya que finalmente obtenemos una expresión analítica.

Ejemplo 1. Si consideramos la función se tiene que para un valor

Si es distinto de cero tenemos que

y la función no es derivable en .

Ahora si consideramos la función se tiene que para todo punto en el que es derivable, es más, el dominio de es precisamente los puntos en los que es derivable (no tenemos en cuenta si es derivable por derecha o por izquierda), luego podemos decir que es la función derivada de y lo notaremos como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG25 |
| **Descripción** | Imagen con dos funciones en diferentes planos a la izquierda y a la derecha |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | A la izquierda la función y a la derecha su función derivada |

Teniendo en cuneta los ejemplos trabajados en esta sección tenemos que:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

[SECCIÓN 2] 3.5 Consolidación

[SECCIÓN 1]**4 Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_REC |
| **Título** | Competencias: Concepto de derivada |
| **Descripción** | Actividad en la que se refuerza lo aprendido sobre la derivada. |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_05\_CO\_REC |
| **Título** | Evalúa tus conocimientos sobre derivación. |
| **Descripción** | Acitivdad en la que se evalua los conceptos que hemos trabajado en este tema. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_G11\_05\_CO\_REC |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Relaciona los contenidos del tema. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_REC | |
| **Web 01** |  |  |
| **Web 02** |  |  |
| **Web 03** |  |  |
| **Web 04** |  |  |